KÖKLÜ İFADELER

DERS NOTLARI KONU BAŞLIKLARI:

-TANIM
-GİZLİ KAREKÖK
-KÖKLÜ İFADELERDE DÖRT İŞLEM
-TOPLAMA VE ÇIKARMA
-KÖKLÜ İFADELERİN ÇARPIMI
-KÖKLÜ İFADELERİ BÖLÜMÜ
-PAYDASI İRRASYONEL OLAN İFADELERİN PAYDASININ RASYONEL YAPILMASI

$a \in R$ ve $n \in Z^+$ olmak üzere, n çift olduğunda $x^n = a$ denklemini sağlayan iki x değeri vardır.

x = -3 için $(-3)^2 = 9$

x = +3 için $(+3)^2 = 9$ olduğu görülür.

n tek olduğunda $x^n = a$ denklemini sağlayan bir x değeri vardır.

x = 4 için $(4)^3 = 64$ olduğu görülür.

x^n ifadesinde her iki tarafında $1/n$ inci kuvvetini aldığımızda;

$$(x^n)^{1/n} = a^{1/n} \Rightarrow x = a^{1/n} \Rightarrow x = \sqrt[n]{a}$$

$x = \sqrt[n]{a}$ ifadesinde

n çift sayı ise $a \geq 0$ olmak üzere bu denklemi sağlayan x sayılarından pozitif olanı alınır

n tek sayı ise denklemi sağlayan yalnızca bir x değeri vardır.

Biraz önce verdiğimiz örneği köklü ifade olarak yeniden alırsak;

$x = \sqrt{9} \Rightarrow x = \sqrt{(\pm 3)^2} \Rightarrow x = |\pm 3| = 3$ bulunur.

$x = \sqrt[3]{-8} \Rightarrow x = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$ bulunur.

$$x \in R \Rightarrow x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$$

* İrrasyonel sayılar, daha önce sayıları işlerken de gördüğümüz iki tam sayının oranı olarak ifade edilemeyen sayılardır ($e, \ln 3, \sqrt{2}, \pi$) ve köklü çoklukların çoğunun da irrasyonel olduğunu biliyoruz.

* İçinde bulunduğu kökün kuvvetiyle aynı kuvvette olan ifadeler kök dışına çıkarılabilir. Burada kastedilen terimlerin çarpım ve (veya) bölüm halinde olması gerekir.

* $\sqrt{64x^4y^6z^3}$ ifadesini ele alırsak,

$\sqrt{8^2(x^2)^2(y^3)^2z^2z} = 8x^2y^3z\sqrt{z}$ elde edilir.

* $\sqrt[3]{x^6 + y^6}$ ifadesindeki terimler kuvvet olarak uygun görünse de iki terimin toplamı halinde bulundukları için kök dışına çıkartılamazlar.

* Aynı şekilde köklü bir ifade ile çarpım ya da bölüm halinde bulunan bir terim de kökün kuvvetini alarak kök içine atılabilir.

* Köklü ifadelerde en çok karıştırılan işlem kök içinde kök sökebilirsen sök işlemleridir.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}}} = \sqrt[m \cdot n \cdot p]{x}$$

Yukarıda görüldüğü gibi, köklerin kuvvetleri çarpılarak kök kuvveti olarak yazılır.

*

$$\sqrt[4]{x^3 \sqrt[3]{\frac{2}{y^2}\sqrt{z}}} = \sqrt[4.3]{(x^3)^3 (\frac{2}{y^2})\sqrt{z}}$$

$$= \sqrt[4.3.2]{(x^9)^2 (\frac{2}{y^2})^2 z} = \sqrt[24]{x^{18} . \frac{4}{y^4} . z}$$

$$= \sqrt[24]{\frac{4 \cdot x^{18} \cdot z}{y^4}}$$

Yukarıdaki örnekte köklerin kuvvetlerinin çarpılıp kök kuvvetinin bulunduğunu ve her terimin kendi sağındaki kökün içine girerken o kökün kuvvetini aldığını görüyoruz. Bu işlem istenirse terimler $\sqrt[q]{x^p} = x^{p/q}$ şeklinde yazılarak üslü ifade dönüştürülerek de çözülebilir.

* $\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16..............}}} = ?$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:
Bu tür sorularda ifadenin sonsuza gitmesi şartıyla,ifadeyi x'e eşitler ve her iki tarafın 3. kuvvetini alırsak,

$$16\underbrace{\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16\sqrt[3]{16..................}}}}_{x} = x^3 \text{ ifadesini}$$

elde ederiz. Sonsuza giden işlem olduğu için geri kalan kısmına yine x dersek,

$16.x = x^3 \Rightarrow 16 = x^2 \Rightarrow x = 4$ bulunur.

Bu yöntem sonsuza giden bütün sorulara uygulanabilir ve akılda kalıcıdır. Şimdi buna benzer örnekler yapalım ve daha sonra formül ezberlemekten hoşlanan arkadaşlara, ilgili formülleri verelim ki hakkımızda dedikodu çıkmasın.

* $\sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16...........}}} = ?$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:
İfadesinin değerine x dersek ve her iki tarafın küpünü alırsak;

$$16 : \sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16 : \sqrt[3]{16............}}} = x^3 \text{ ifadesini}$$

elde ederiz. İşlem sonsuza gittiği için köklü kısma yine x dersek

$16 : x = x^3 \Rightarrow 16 = x^4 \Rightarrow x = 2$ bulunur.

*

$\sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12 + ...}}} = ?$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:
ifadesinin değerini bulmak için aynı yöntemi kullanarak x'e eşitlersek ve tekrar eden kısma yine x dersek

$12+x=x^2 \Rightarrow x^2-x-12=0 \Rightarrow (x-4)(x+3)=0$
ifadesi elde edilir, buradan da
x = 4
x = -3 değerleri elde edilir. Karekök içinden sayılar pozitif çıkacağından x = 4 bulunur.

Yukarıdaki soruda dikkat edilmesi gereken iki önemli nokta; ifadenin karekök olması ve 12'nin ardışık iki sayının çarpımı (3·4) şeklinde yazılabilmesidir. Daha sonra vereceğimiz formül bu şartların sağlandığı durumlarda geçerli olacaktır.

*

$\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\ldots\ldots\ldots\ldots}}} = ?$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:
ifadesinin de sonucu yukarıdaki yöntemler uygulanarak bulunabilir.

$72-\sqrt{72-\sqrt{72-\sqrt{72-\ldots\ldots\ldots}}}$
$=x^2 \Rightarrow x^2+x-72=0 \Rightarrow (x-8)(x+9)=0$
, x = 8 ve x = -9 bulunur ve pozitif değer olan x = 8 alınır.

Bu soruda yine 72 sayısının ardışık iki sayının çarpımı ve ifadenin karekök olduğuna dikkat edilmelidir.

Yukarıda çözdüğümüz sorularla ilgili formülleri sırasıyla verelim;

$$\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\sqrt[n]{x\ldots\ldots\ldots}}} = \sqrt[n-1]{x}$$

$$\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x:\sqrt[n]{x\ldots\ldots}}} = \sqrt[n+1]{x}$$

$$\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)+\sqrt{x(x+1)\ldots\ldots}}} = x+1$$

$$\sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)-\sqrt{x(x+1)-\ldots}}} = x$$

Bu formüllerin ezberi kolay görünmekle beraber zaman içinde unutulmakta ya da birbirine karıştırılmaktadır.

* $\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots\ldots}}} = 12$ ise a=?

Çözüm:

Her iki tarafında karesi alınırsa,

$$a+\underbrace{\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a+\ldots\ldots}}}}_{12} = 144$$

$$a+12=144 \Rightarrow a=132$$

Gizli Karekök

$a\pm\sqrt{b}$ ifadesinin karesini aldığımızda
$\left(a\pm\sqrt{b}\right)^2 = a^2+b\pm 2a\sqrt{b}$ elde ederiz.
Bu ifade karekök içine alındığında
$\sqrt{a^2+b\pm 2a\sqrt{b}}$ ifadesinde kökün içindeki tam kare ifadeyi yukarıdaki işlemin tersi düşünülerek dışarı çıkarmak gerekir.

Yukarıda anlattıklarımızı bir örnekle açıklayalım;

* $\sqrt{9+4\sqrt{5}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{9+4\sqrt{5}} = \sqrt{\left(a+\sqrt{b}\right)^2}$

$9+4\sqrt{5} = a^2+b+2a\sqrt{b}$ buradan

$\left.\begin{array}{l} 2a\sqrt{b}=4\sqrt{5} \\ a\sqrt{b}=2\sqrt{5} \end{array}\right\} a=2 \Leftrightarrow b=5$ olduğu görülür.

O halde;

$\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)^2} = 2+\sqrt{5}$ bulunur.

* $\sqrt{32-10\sqrt{7}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

Önceki soruda uygulanan çözümü tekrar edersek,

$32-10\sqrt{7} = a^2+b-2a\sqrt{b}$

$2a\sqrt{b}=10\sqrt{7}$

$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b}=5\sqrt{7} \\ a^2+b=32 \end{array}\right\} a=5 \Leftrightarrow b=7$

O halde;

$\sqrt{(5-\sqrt{7})^2} = 5-\sqrt{7}$ bulunur.

* $\sqrt{11+4\cdot\sqrt{6}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

$\sqrt{11+4\sqrt{6}} = \sqrt{(a+\sqrt{b})^2}$

$11+4\sqrt{6} = a^2+b+2a\sqrt{b}$

$2a\sqrt{b}=4\sqrt{6}$

$\left.\begin{array}{l} a\sqrt{b}=2\sqrt{6} \\ a^2+b=11 \end{array}\right\}$ burada a = 2 ve b = 6

alındığında; $a^2+b=4+6=10$ olup iki eşitliği birden sağlamadığı görülür.

Bu tür sorulardan eşitliklerin sağ tarafları 2 ile çarpılarak

$\left.\begin{array}{l} ab=4\sqrt{6} \\ a^2+b=22 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a=4 \\ b=6 \end{array}$

$\Rightarrow a^2+b=16+6=22$ bulunur.

Burada dikkat edilecek nokta kökün içindeki ifade 2 ile çarpıldığı için aynı zamanda 2'ye bölünmelidir.

$\sqrt{\dfrac{(4+\sqrt{6})^2}{2}} = \dfrac{4+\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \dfrac{4\sqrt{2}+\sqrt{12}}{2} = 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$

bulunur.

<u>II. yol:</u> Bu çözüm şekli genellikle öğrenciler tarafından daha çok tercih edilir.

$\sqrt{11+4\sqrt{6}} = \sqrt{11+2\sqrt{24}}$

Yukarıda görüldüğü gibi $(2a\sqrt{b})$

ifadesindeki a'nın karesi alınarak $(2\sqrt{a^2b})$ şeklinde kökün içine atılırsa, kök içindeki sayının çarpanlarını deneyerek, toplamları 11 olan ikiliyi bulmak gerekir.

$24 = \underbrace{3}_{a^2}\cdot\underbrace{8}_{b}$ yazılıp $\begin{array}{l} a^2=3 \\ b=8 \end{array}$

bulunur.

$\sqrt{(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2} = \sqrt{3}+2\sqrt{2}$ bulunur.

* $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$ ifadesinin değerini bulunuz.

Çözüm:

Bu soruyu da II. Yol ile çözelim.

Kök içindeki 35 sayısının çarpanları 5 ve 7 olup, $a^2=5$ $b=7$ alınırsa,

$\begin{array}{l} a^2+b=12 \\ a^2\cdot b=35 \end{array}$ olduğu görülür.

O halde

$\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{7}\right)^2} = \sqrt{5}+\sqrt{7}$ bulunur.